

УДК 666.3-1

DOI <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2025.1.1/30>**Морозова О.М.**

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

Федоренко О.Ю.

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

Геворкян Е.С.

Український державний університет залізничного транспорту

ВИКОРИСТАННЯ СТАТИСТИКИ ВЕЙБУЛЛА В ОПИСІ МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ КЕРАМІЧНИХ МАТЕРІАЛІВ

Стаття присвячена дослідженню застосування статистики Вейбулла для моделювання механічних характеристик оксидної кераміки, зокрема кераміки на основі діоксиду цирконію (ZrO_2). Оксидна кераміка є однією з найбільш широко використовуваних керамічних систем у сучасній промисловості. Зокрема, кераміка ZrO_2 має високу міцність, зносостійкість, хімічну стійкість і біосумісність, що робить її ідеальним матеріалом для застосування в різних галузях. Так, наприклад, імплементація керамічних матеріалів в галузі біомедицинської інженерії й кісткових імплантантів показала, що механічні властивості та надійність керамічних систем є найсуттєвішими факторами, що регулюють надійність матеріалів. Кераміка ZrO_2 відома своєю високою міцністю, зносостійкістю, хімічною стійкістю та біосумісністю, що робить її придатною для застосування в різних галузях, включаючи біомедицину інженерію та кісткові імплантати. Проте її основні обмеження пов'язані з низькою ударною міцністю і тріщиностійкістю. Для керамічних матеріалів, що зазнають дії механічних впливів, оцінка однорідності структури та відтворюваності механічних характеристик має особливо важливе значення. Для подолання цих проблем використовується статистичний аналіз Вейбулла, який описує ймовірність руйнування керамічних матеріалів при різних навантаженнях. Статистичний аналіз Вейбулла є ефективним методом оцінки надійності керамічних матеріалів, а також може бути застосований для аналізу статистики життєвого циклу матеріалу. У роботі проаналізовано моделі Вейбулла та методи оцінки її параметрів, зокрема методи найменших квадратів, максимальної правдоподібності та метод моментів. Представлено результати досліджень міцності на вигин зразків діоксиду цирконію та впливу дефектів і температури на їх міцність. Дослідження показують, що статистика Вейбулла є ефективним інструментом для оцінки однорідності і надійності керамічних матеріалів.

Ключові слова: керамічні матеріали, надійність, модель Вейбулла, оксидка кераміка, якість.

Постановка проблеми. Відомо, що основними обмеженнями кераміки для конструкційних і спеціальних не конструкційних застосувань є низька ударна міцність і тріщиностійкість, що створює складнощі під час експлуатації різних деталей і конструкцій із цих матеріалів. Характеристики міцності кераміки зазвичай розкидані, тому для розуміння механічних характеристик цього матеріалу необхідний статистичний аналіз.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Статистика Вейбулла широко використовується для опису статистичної поведінки механічних властивостей багатьох матеріалів, зокрема сучасної кераміки, скла, металоматричних композитів, керамічних матричних композитів і полімерних матричних композитів. Одним із способів визначення критерію надійності керамічних матеріалів

є статистичний аналіз Вейбулла, у якому модуль Вейбулла m вважається мірою надійності кераміки. Високе значення m свідчить про те, що матеріал має високий ступінь однорідності властивостей та високу надійність.

Постановка завдання. Метою статті є літературний огляд застосування статистики Вейбулла для моделювання різноманітних механічних і фізико-механічних характеристик керамічних матеріалів, зокрема кераміки на основі діоксиду цирконію.

Виклад основного матеріалу. Модель Вейбулла може бути використана для оцінки ймовірності руйнування зразків керамічних матеріалів за різних схем випробувань, впливу дефектів і температури на міцність керамічних матеріалів. У разі керамічних матеріалів, модель може бути

використана для опису ймовірності руйнування зразка при заданому навантаженні. Загалом, дво-параметрична форма функції Вейбулла застосовується для визначення сукупної ймовірності руйнування Р компонента або зразка за заданої прикладеної напруги σ :

Модель Вейбулла може бути використана для оцінки ймовірності руйнування зразків керамічних матеріалів за різних схем випробувань, впливу дефектів і температури на міцність керамічних матеріалів. У разі керамічних матеріалів, модель може бути використана для опису ймовірності руйнування зразка при заданому навантаженні. Загалом, двопараметрична форма функції Вейбулла застосовується для визначення сукупної ймовірності руйнування Р компонента або зразка за заданої прикладеної напруги σ :

$$P = 1 - e^{[-(\sigma/\sigma_0)^m]} \quad (1)$$

де m – модуль Вейбулла; σ_0 – параметр масштабу, що має ту саму розмірність, що й напруга [1, с. 149].

Параметри моделі Вейбулла m і σ_0 можна оцінити різними методами, зокрема методом найменших квадратів, методом максимальної правдоподібності та методом моментів [2, с. 372; 3, сс. 252-254; 4, сс. 1745-1746].

Авторами [5, сс. 875-876; 6, с. 450] було запропоновано емпіричне рівняння для визначення модуля Вейбулла m_{es} за коефіцієнтом варіації (c_v) вимірної міцності на руйнування:

$$m_{es} = \frac{\alpha}{(c_v)^f} + \beta \quad (2)$$

де α і β – константи, що залежать від розміру вибірки, і були визначені та сформульовані шляхом аналізу даних, отриманих за допомогою моделювання Монте-Карло. Слід зазначити, що цей метод дає змогу визначити модуль Вейбулла m_{es} , а для визначення параметра σ_0 використовують згадані вище методи.

Теорія Вейбулла, заснована на концепції руйнування найслабшої ланки для розподілу міцності керамічних матеріалів, може бути ефективно описана в математичних термінах [7, с. 80]. У такому разі, ключовим припущенням є те, що руйнування виникає внаслідок єдиного типу руйнування, а саме структурної неоднорідності. Згідно з цим підходом, поведінку міцності можливо описати за допомогою особливої форми розподілу екстремальних значень, так званим розподілом Вейбулла, що встановлює кореляцію між механічним навантаженням і ймовірністю руйнування деталі, за умови, що параметри розподілу відомі. Використовуючи рівень міцності, за якого ймовірність руйнування стає рівною 63,2% (σ_0), модуль Вейбулла (m) стає мірою розподілу міцності. Чим вищий модуль Вейбулла, тим більш однорідним є матеріал. Це означає, що однорідні "дефекти" рівномірно розподілені по всьому об'єму, а також тим вужча крива ймовірності розподілу міцності розподілу. Сучасні досягнення демонструють значення в діапазоні $10 < m < 20$. Ці значення визначаються для керамічних матеріалів зазвичай за допомогою методу чотирьохточкового вигину, оскільки вимірювання міцності на розтягнення цих матеріалів надзвичайно складне:

ристовуючи рівень міцності, за якого ймовірність руйнування стає рівною 63,2% (σ_0), модуль Вейбулла (m) стає мірою розподілу міцності. Чим вищий модуль Вейбулла, тим більш однорідним є матеріал. Це означає, що однорідні "дефекти" рівномірно розподілені по всьому об'єму, а також тим вужча крива ймовірності розподілу міцності розподілу. Сучасні досягнення демонструють значення в діапазоні $10 < m < 20$. Ці значення визначаються для керамічних матеріалів зазвичай за допомогою методу чотирьохточкового вигину, оскільки вимірювання міцності на розтягнення цих матеріалів надзвичайно складне:

$$F = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^m \right\} \quad (3)$$

де F – вірогідність відмов; σ_u – параметр порогової напруги (зазвичай $\sigma_u = 0$); σ_0 – масштабний параметр або характерна міцність (середнє значення нормального розподілу).

Слід зазначити, що параметр порогової напруги, σ_u , являє собою мінімальну напругу, нижче якої випробуваний зразок не зруйнується. Масштабний параметр або характерна міцність, σ_0 , залежить від конфігурації напруги та розміру зразка для випробування. Параметр форми розподілу, m , являє собою модуль Вейбулла [1, с. 151]. Статистика Вейбулла дає змогу розрахувати значення міцності деталей залежно від їхнього об'єму, а протокол випробувань із визначення модуля Вейбулла зазначено в DIN EN 843-5 і DIN 51 110-3 [8, с. 7].

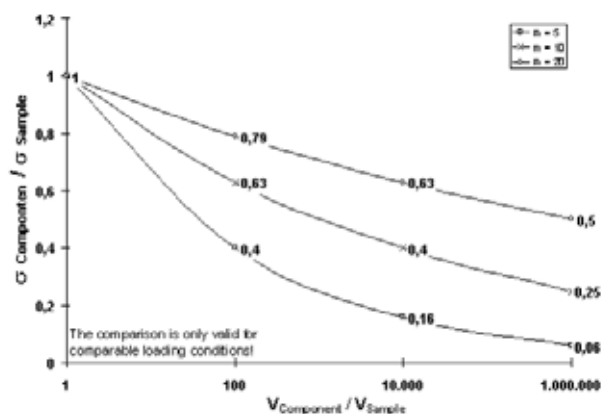


Рис. 1. Залежність міцності від розмірів деталі для різних значень модуля Вейбулла, m . [9, с. 81]

Автори [9, с. 229] визначали міцність на вигин зразків діоксиду цирконію з подальшою оцінкою результатів за допомогою різних методів оцінки статистики Вейбулла. Кумулятивна функція розподілу для розподілу Вейбулла визначалася згідно з:

Таблиця 1

Розрахункові параметри Вейбулла

Зразки	Оцінювання за методом найменших квадратів середнього рангу (95% CI), EXCEL	Оцінювання за медіанним рейтингом методу найменших квадратів (95% CI)	Оцінювання методом максимальної ймовірності (95% CI)	Оцінювання з поправкою на максимальну ймовірність (95% CI)
Контрольна група (DCS, Allschwill, Швейцарія)	6.4	7.1 (3.1,15.9) ^a	10.1 (6.6,15.6) ^a	(5.8,14.2)
ZE (ZENO ZR Wieland, Pforzheim, Німеччина)	5.1	5.0 (3.0,8.2) ^a	5.7 (3.7,8.7) ^a	5.2 (3.2,8.0)
GC (GC ZR Disc GC Europe, Leuven, Бельгія)	7.5	7.2 (4.3,12.0) ^a	8.3 (5.5,12.6) ^a	7.6 (4.8,11.7)
CZ (Ceramill ZI Amann Girsbach, Koblach, Австрія)	6.2	6.8 (5.0,9.1) ^a	5.6 (3.8,8.2) ^a	5.0 (3.2,7.8)
CY (Coprano YZ White Peak, Essen, Німеччина)	5.3	5.1 (3.1,8.4) ^a	5.9 (3.8,8.9) ^a	5.3 (3.3,8.2)
IC (InCoris ZI F0.5 Sirona Dental, Bensheim, Німеччина)	7.5	7.3 (4.1,12.6) ^a	8.8 (5.8,13.3) ^a	8.0 (5.0,12.3)
VI (Vita In-Ceram YZ, Vita Zahnfabrik, Bad Säckingen, Німеччина)	8.5	8.7 (6.4,11.7) ^a	7.4 (5.1,10.8) ^a	6.8 (4.2,10.4)
CC (Circon ZR, DeguDent, Hanau, Німеччина)	5.7	5.5 (3.2,9.5) ^a	6.6 (4.3,10.0) ^a	6.0 (3.8,9.3)
LZ (LAVA Zirkon3M, ESPE, Seefeld, Німеччина)	8.9	9.8 (7.5,12.9) ^a	7.7 (5.3,11.2) ^a	7.0 (4.4,10.8)
p-величина		p = 0.207	p = 0.357	
Контрольна група	1772	1751 (1619,1894) ^a	1733 (1645,1826) ^a	(1625,1848)
ZE (ZENO ZR)	994	993 (891,1106) ^c	992 (902,1089) ^c	(883,1112)
GC (GC ZR Disc)	935	935 (868,1007) ^d	932 (875,994) ^d	(862,1009)
CZ (Ceramill ZI)	1289	1274 (1174,1381) ^b	1289 (1171,1419) ^b	(1147,1448)
CY (Coprano YZ)	1222	1220 (1099,1354) ^{bc}	1217 (1111,1333) ^{bc}	(1089,1361)
IC (InCoris ZI F0.5)	1032	1025 (952,1104) ^c	1021 (960,1085) ^c	(947,1100)
VI (Vita In-Ceram YZ)	1171	1166 (1094,1242) ^c	1174 (1091,1262) ^c	(1075,1282)
CC (Circon ZR)	938	937 (851,1032) ^{cd}	932 (860,1011) ^{cd}	(844,1029)
LZ (LAVA Zirkon)	992	984 (929,1041) ^c	994 (926,1066) ^c	(913,1081)
p- величина		p <0.001	p <0.001	-

$$G(X) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{x - S_0}{S} \right)^m \right\}, \quad (4)$$

при $S_0=0$, густина рівна

$$g(x) = \frac{m}{S} \left(\frac{x}{S} \right)^{m-1} \exp \left\{ - \left(\frac{x}{S} \right)^m \right\}. \quad (5)$$

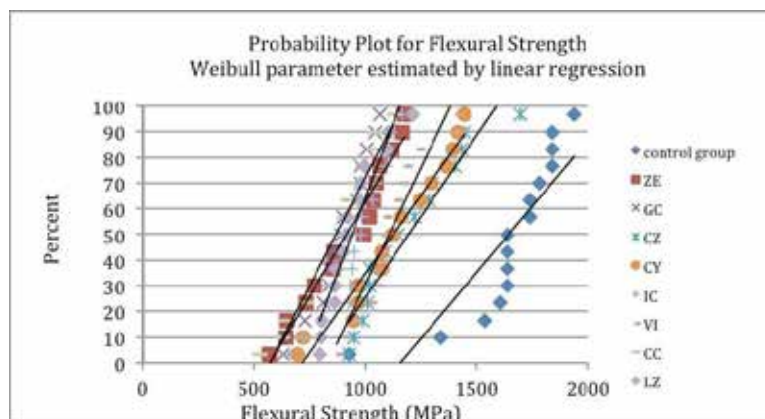
Вибірка становила 9 груп, кожна група складалася з 15 зразків. Результати випробувань наведено в таблиці 1, а також зображено на рис. 2.

Використання припущення про розподіл Вейбулла дало змогу виявити статистичні відмінності в середній міцності на вигин (μ) нормальної та характеристичної міцності (s).

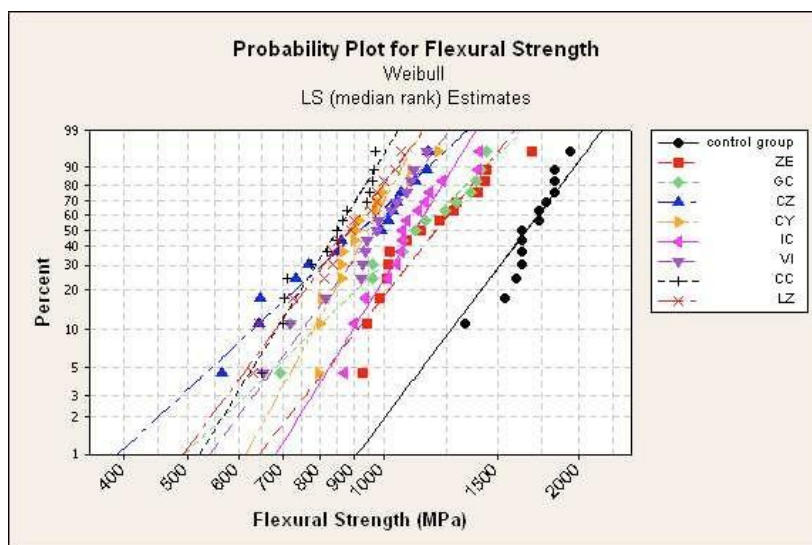
На рис. 3 представлено розподіл Вейбулла, побудований для тридцяти дев'яти комерційних гнучких зразків (штапиків) з діоксиду цирконію

3Y-TZP розміром $3 \text{ мм} \times 4 \text{ мм} \times 45 \text{ мм}$, випробування яких проводили на 4-точкових пристосуваннях розміром $20 \text{ мм} \times 40 \text{ мм}$. Фрактографічний аналіз, проведений для кожного зразка вибірки, засвідчив, що більшість дефектів, що обмежують міцність, були об'ємно розподіленими порами діаметром від 10 до 20 $\mu\text{м}$. Руйнування 6 найслабших зразків спричинене такими особливо великими дефектами, як композиційні неоднорідності, включення і грубі пори, що тягне за собою нерівномірність патерну міцності [10, с. 143]. Правильний аналіз цього набору даних вимагає використання статистичного аналізу, описаного в [11, с. 5].

Дослідження тетрагонального полікристалічного діоксиду цирконію, стабілізованого 3% моль-ітрієм (3Y-TZP) (середній розмір зерна



a



b

Рис. 2. Графік імовірності для параметра Вейбулла, оціненого методом найменших квадратів (a – середній ранг в EXCEL, b – медіанний ранг в MINITAB) [9, с. 231]

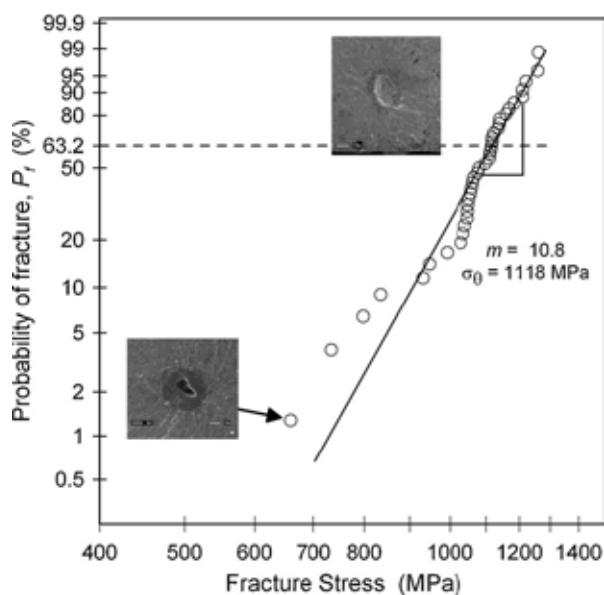


Рис. 3. Міцність на вигин зразків із діоксиду цирконію 3Y-TZP [10, с. 141]

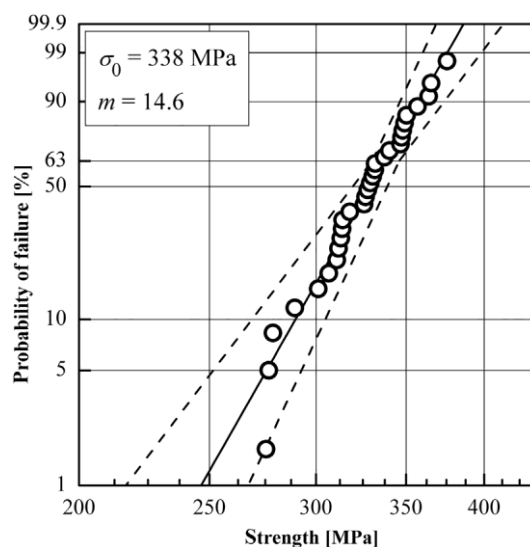


Рис. 4. Діаграма Вейбулла, що відображає залежність кумулятивної ймовірності руйнування від міцності (пряма лінія – розподіл Вейбулла, пунктирні лінії – межі комбінованих 90% довірчих інтервалів) [13, с. 178]

$d \sim 0,30\mu\text{m}$) під час випробування на 4-точковий вигин, було преведене в [12, сс. 3-6]. Систематичний аналіз за допомогою статистики Вейбулла показав, що середнє значення міцності на вигин та модуль Вейбулла змінюються від 960 МПа та $m=10.9$ для синтезованого порошку, а при 100 і 200 годинах старіння в парах води в автоклаві за $T=131^\circ\text{C}$, становлять 916 МПа ($m=19,5$) і 860 МПа ($m=19.8$) відповідно. Збільшення модуля Вейбулла m пояснюється зміною характеру походження руйнування – від природних дефектів вихідного матеріалу до початкових дефектів у зруйнованому поверхневому шарі, який під навантаженням розширюється на глибину, що дорівнює його товщині.

Діаграма Вейбулла в разі одноосового й одно-рідного поля напружень для глиноземистої кераміки (рис. 4) показує, що навіть за дуже малої напруги зберігається певний ризик руйнування

матеріалу. Для $\sigma/\sigma_0 \ll 1$ справедливе твердження, що $F \propto \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m$ [13, с. 179].

Висновки. Статистика Вейбулла є ефективним інструментом для опису статистичної поведінки механічних властивостей керамічних матеріалів, зокрема кераміки на основі діоксиду цирконію. Використання статистики Вейбулла дає змогу проводити статистичний аналіз даних, отриманих під час випробувань керамічних матеріалів на міцність, відповідно до вимог міжнародних стандартів. Параметр форми розподілу Вейбулла (m) є мірою однорідності матеріалу. Для кераміки на основі діоксиду цирконію модуль Вейбулла зазвичай перебуває в діапазоні $10 < m < 20$. Статистика Вейбулла може бути застосована для оцінювання впливу різних чинників, таких як склад, обробка та умови експлуатації, на механічні властивості керамічних матеріалів.

Список літератури:

1. Deng B., Jiang D. Determination of the Weibull parameters from the mean value and the coefficient of variation of the measured strength for brittle ceramics. *Journal of Advanced Ceramics*. 2017. № 6(2). Pp. 149–156. <https://doi.org/10.1007/s40145-017-0227-3>
2. Davies I.J. Unbiased estimation of Weibull modulus using linear least squares analysis—A systematic approach. *Journal of the European Ceramic Society*. 2017. № 37(1). Pp. 369–380. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2016.07.008>
3. Bermejo R., Supancic P., Danzer R. Influence of measurement uncertainties on the determination of the Weibull distribution. *Journal of the European Ceramic Society*. 2012. № (32). Pp. 251–255. [10.1016/j.jeurceramsoc.2011.09.008](https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2011.09.008)

4. Wu D., Jiang H. Comment on «A new probability index for estimating Weibull modulus for ceramics with the last-square method». *Journal of Materials Science Letters*. 2003. № (22). Pp. 1745–1746. <https://doi.org/10.1023/B%3AJMSL.0000005410.31979.BE>
5. Gong J. A simple method for determining the Weibull estimator. *Journal of Materials Science Letters*. 1997. №(16). Pp. 875–876. <https://doi.org/10.1023/A:1018515516659>
6. Gong H., Li Y. Relationship between the estimated Weibull modulus and the coefficient of variation of the measured fracture strength for ceramics. *Journal of the American Ceramics Society*. 1999. № 82(2). Pp. 449–452 <https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.1999.tb20084.x>
7. Breviary Technical Ceramics. 4th ed. Verband d Keramischen Industrie e V Verlag Hans Fahner GmbH & Co. KG, 2004. 215 p.
8. EN ISO 20501:2022. Fine ceramics (advanced ceramics, advanced technical ceramics) – Weibull statistics for strength data (ISO 20501:2019). Effective Date from 28.12. 2022. <https://surl.li/zmwwmb>
9. Stawarczyk B., Özcan M., Trottman A., Hämmerle C.H.F., Roos M. Evaluation of flexural strength of hiped and presintered zirconia using different estimation methods of Weibull statistics. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2022. № 10. Pp. 227–234. doi:10.1016/j.jmbbm.2012.01.020
10. Quinn J. B.; Quinn G. D. A practical and systematic review of Weibull statistics for reporting strengths of dental materials. *Dental Materials*. 2010. № 26(2) Pp. 135–147. doi:10.1016/j.dental.2009.09.006
11. ASTM C1239-13. Standard practice for reporting strength data and estimating Weibull distribution parameters for advanced ceramics. West Conshohocken, PA, USA: ASTM Int.; 2013. <https://surl.li/lloep1>
12. Marro F., Alvaro M., Lamghari M., Marcos G. Weibull characterization of the flexural strength of hydrothermally degraded 3Y-TZP zirconia. *Ceramics International*. 2014. № 40(8B). Pp. 12777–12782. 10.1016/j.ceramint.2014.04.131
13. Lube T., Danzer R. Mechanical properties and reliability of advanced ceramics. *Advanced Ceramics for Dentistry*. 2014. Pp. 173–199. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-394619-5.00009-2>

Morozova O.M., Fedorenko O.Yu., Hevorkian E.S. APPLICATION OF WEIBULL STATISTICS IN MECHANICAL PROPERTIES DESCRIPTION OF CERAMIC MATERIALS

The article is devoted to the study of the use of Weibull statistics for the modelling of mechanical characteristics of oxide ceramics, in particular ceramics based on zirconium dioxide (ZrO₂). Oxide ceramics is one of the most widely used ceramic systems in modern industry. In particular, ZrO₂ ceramics have high strength, wear resistance, chemical resistance and biocompatibility, making them an ideal material for use in various industries. For instance, the implementation of ceramic materials in the field of biomedical engineering and bone implants has shown that the mechanical properties and reliability of ceramic systems are the most important factors governing the reliability of materials. ZrO₂ ceramics are known for their high strength, wear resistance, chemical resistance, and biocompatibility, making them suitable for applications in a variety of fields, including biomedical engineering and bone implants. However, its main limitations are related to low impact strength and crack resistance. For ceramic materials subjected to mechanical stress, the assessment of structural homogeneity and reproducibility of mechanical properties is particularly important. To overcome these problems, Weibull statistical analysis is used, which describes the probability of failure of ceramic materials under various loads. The Weibull statistical analysis is an effective method for estimating the reliability of ceramic materials and can also be used to analyse the statistics of the material's life cycle. The paper analyses the Weibull model and methods for estimating its parameters, in particular the least squares, maximum likelihood and method of moments methods. The paper presents the results of studies of the bending strength of zirconium dioxide samples and the effect of defects and temperature on their strength. The studies show that Weibull statistics is an effective tool for assessing the homogeneity and reliability of ceramic materials.

Key words: ceramic materials, reliability, Weibull model, oxide ceramics, quality.